Samedi 25 Juin 2022

— Jour 1 —

1. Soit ABC un triangle avec $\widehat{ABC} \neq 90°$, et AB son côté le plus court. Soit H l'orthocentre de ABC. Soit (Γ) le cercle de centre B et de rayon BA. Soit D le second point où la droite (CA) coupe (Γ). Soit E le second point où (Γ) coupe le cercle circonscrit au triangle BCD. Soit F le point d'intersection des droites (DE) et (BH).

Montrer que la droite (BD) est tangente au cercle circonscrit au triangle DFH.

2. Trouver tous les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs, avec $a \geqslant b \geqslant c$, tels que $a^2 + 3b$, $b^2 + 3c$ et $c^2 + 3a$ soient des carrés parfaits.

3. Soit n un entier strictement positif et $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ une suite de nombres réels strictement positifs dont le produit est égal à 2. Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$, on pose $a_{2n+k} = a_k$ et on définit

$$A_k = \frac{1 + a_k + a_k a_{k+1} + \cdots + a_k a_{k+1} \ldots a_{k+n-2}}{1 + a_k + a_k a_{k+1} + \cdots + a_k a_{k+1} \ldots a_{k+2n-2}}.$$

On suppose que $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ sont deux à deux distincts ; montrer qu'exactement la moitié d'entre eux sont strictement plus petits que $\sqrt{2} - 1$.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

PAMO 2022
Benguerir, Morocco

Dimanche 26 Juin 2022

— Jour 2 —

4. Trouver toutes les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}_{>0}$ dans $\mathbb{R}_{>0}$ telles que, pour tous $x, y > 0$, les deux équations soient vérifiées

$$\big(f(x) + y - 1\big)\big(g(y) + x - 1\big) = (x + y)^2,$$

$$\big(-f(x) + y\big)\big(g(y) + x\big) = (x + y + 1)(y - x - 1).$$

Note : $\mathbb{R}_{>0}$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

5. Soit r un entier strictement positif. Déterminer le plus petit entier naturel non nul m vérifiant la condition : pour tous ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_r$ tels que $A_i \cap A_j = \varnothing$, pour tout $i \neq j$, et $\bigcup_{k=1}^{r} A_k = \{1, 2, \ldots, m\}$, il existe $a, b \in A_k$ pour un certain k tels que $1 \leqslant \frac{b}{a} \leqslant 1 + \frac{1}{2022}$.

6. Existe-t-il des entiers strictement positifs $n_1, n_2, \ldots, n_{2022}$ tels que le nombre

$$\left(n_1^{2020} + n_2^{2019}\right)\left(n_2^{2020} + n_3^{2019}\right)\cdots\left(n_{2021}^{2020} + n_{2022}^{2019}\right)\left(n_{2022}^{2020} + n_1^{2019}\right)$$

soit une puissance de 11 ?

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points