Kenya – PAMO 2018

26^{th} PAN AFRICAN MATHEMATICS OLYMPIAD

Nairobi from 23 to 30 June 2018

Day 1 : Wednesday, June 27, 2018 **Duration : 4 h 30 min**

Problem 1

Find all functions $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ such that $(f(x+y))^2 = f(x^2) + f(y^2)$ for all $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problem 2

A chess tournament is held with the participation of boys and girls. The girls are twice as many as boys. Each player plays against each other player exactly once. By the end of the tournament, there were no draws and the ratio of girl winnings to boy winnings was $\frac{7}{9}$.
How many players took part at the tournament ?

Problem 3

For any positive integer x, we set

$$g(x) = \text{the largest odd divisor of } x,$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{g(x)} & \text{if } x \text{ is even;} \\ 2^{\frac{x+1}{2}} & \text{if } x \text{ is odd.} \end{cases}$$

Consider the sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ defined by $x_1 = 1,\ x_{n+1} = f(x_n)$. Show that the integer 2018 appears in this sequence, determine the least integer n such that $x_n = 2018$, and determine whether n is unique or not.

Kenya – PAMO 2018

$26^{ièmes}$ **OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES**

Nairobi du 23 au 30 Juin 2018

Jour 1 : Mercredi 27 Juin 2018 **Durée : 4 h 30 min**

Problème 1

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ telles que $(f(x+y))^2 = f(x^2) + f(y^2)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problème 2

Un tournoi d'échecs est organisé avec la participation de garçons et de filles. Le nombre de filles est le double de celui des garçons. Deux joueurs se rencontrent exactement une fois. A la fin du tournoi, il n'y a eu aucun nul et le rapport des victoires des filles par les victoires des garçons a été $\frac{7}{9}$.
Combien de joueurs ont participé au tournoi ?

Problème 3

Pour tout entier naturel non nul x, on pose

$$g(x) = \text{le plus grand diviseur impair de } x,$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{g(x)}, & \text{si } x \text{ est pair;} \\ 2^{\frac{x+1}{2}}, & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x_1 = 1,\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que l'entier 2018 apparaît dans cette suite, déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que $x_n = 2018$, et déterminer si n est unique ou non.

AMU

Kenya – PAMO 2018

26^{th} PAN AFRICAN MATHEMATICS OLYMPIAD

Nairobi from 23 to 30 June 2018

Day 2 : Thursday, June 28, 2018 **Duration : 4 h 30 min**

Problem 4

Given a triangle ABC, let D be the intersection of the line through A perpendicular to AB, and the line through B perpendicular to BC. Let P be a point inside the triangle. Show that $DAPB$ is cyclic if and only if $\angle BAP = \angle CBP$.

Problem 5

Let a, b, c and d be non-zero pairwise different real numbers such that

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4 \text{ and } ac = bd.$$

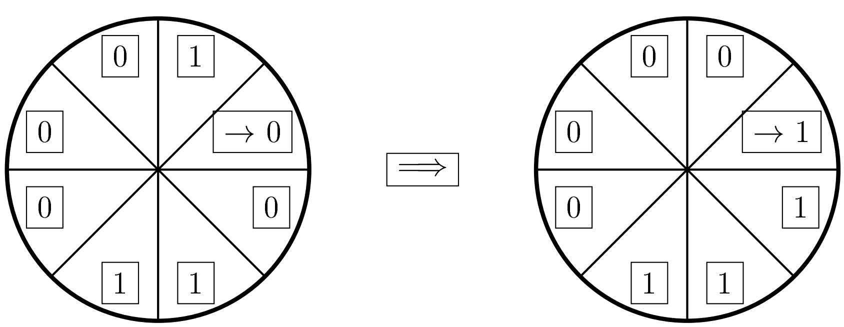
Show that

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} \leqslant -12$$

and that -12 is the maximum.

Problem 6

A circle is divided into n sectors ($n \geqslant 3$). Each sector can be filled in with either 1 or 0. Choose any sector $\mathcal{C}$ occupied by 0, change it into a 1 and simultaneously change the symbols x, y in the two sectors adjacent to $\mathcal{C}$ to their complements $1-x$, $1-y$. We repeat this process as long as there exists a zero in some sector. In the initial configuration there is a 0 in one sector and 1s elsewhere. For which values of n can we end this process?



AMU

Kenya – PAMO 2018

$26^{ièmes}$ OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES

Nairobi du 23 au 30 Juin 2018

<u>Jour 2 : Jeudi 28 Juin 2018</u> **Durée : 4 h 30 min**

PROBLÈME 4

Etant donné un triangle ABC, soit D le point d'intersection de la droite passant par A perpendiculaire à (AB), et de la droite passant par B perpendiculaire à (BC). Soit P un point à l'intérieur du triangle. Montrer que les points D, A, P et B sont cocycliques si et seulement si $\widehat{BAP} = \widehat{CBP}$.

PROBLÈME 5

Soient a, b, c et d des réels non nuls, deux à deux distincts tels que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4 \text{ et } ac = bd.$$

Montrer que

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} \leqslant -12$$

et que -12 est le maximum.

PROBLÈME 6

Un cercle est divisé en n secteurs ($n \geqslant 3$). Chaque secteur peut être rempli soit par 1 ou 0. On choisit n'importe quel secteur $\mathcal{C}$ contenant 0, on le change en 1 et on change simultanément les symboles x, y dans les deux secteurs adjacents à $\mathcal{C}$ en leurs complémentaires $1 - x$, $1 - y$. On répète ce procédé tant qu'il existe un zéro dans un certain secteur. Dans la configuration initiale il existe un 0 dans un seul secteur et des 1 dans les autres secteurs. Pour quelles valeurs de n peut-on finir ce procédé ?