OPAM 2021 jour1

Problème 1 : Soit n un entier supérieur à 3. Un carré de longueur de côté n est divisé par des droites parallèles à chaque côté en n^2 carrés de longueur de côté 1. Trouvez le nombre de trapèzes convexes qui ont des sommets parmi les sommets des n^2 carrés de longueur de côté 1, avec les côtés inférieurs ou égaux à 3, et dont l'aire est égale à 2. Note : les parallélogrammes sont des trapèzes.

Problème 2 : Soit $\mathcal{C}$ un cercle, P un point extérieur à celui-ci, A et B les points de contact des deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par P. Soit K un point quelconque sur (AB), distinct de A et de B. On pose T le second point d'intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle circonscrit au triangle PBK. En outre, on appelle P' le symétrique de P par rapport à A. Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.

Problème 3 : Soient $a_0, a_1, \ldots$ et $p_0, p_1, \ldots$ des suites infinies d'entiers naturels non nuls vérifiant :

- $a_0 \geq 2$,
- p_n est le plus petit diviseur premier de a_n pour chaque entier $n \geq 0$, et
- $a_{n+1} = a_n + \dfrac{a_n}{p_n}$ pour chaque entier $n \geq 0$.

Montrer qu'il existe un entier N vérifiant $a_{n+3} = 3a_n$ pour tout $n > N$.

OPAM 2021 jour 2

Problème 4 : Déterminer tous les entiers m et n tels que

$$\frac{m^2+n}{n^2-m} \text{ et } \frac{n^2+m}{m^2-n}$$

soient tous deux entiers.

Problème 5 : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$(f(x)+y)(x+f(y)) = f(x^2)+f(y^2)+2f(xy),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Problème 6 : Soit $ABCD$ un trapèze, qui n'est pas un parallélogramme, tel que $(AD)//(BC)$. Les diagonales (BD) et (AC) se coupent au point O. Les cercles circonscrits aux triangles AOB et DOC se coupent encore au point S.

Montrer que les cercles circonscrits aux triangles ASD et BSC sont tangents.